Tutorato Analisi I - 13/12/23

SERIE NUMERICHE

Richiami teorici di base

a_n successione $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

$S_n = a_1 + \dots + a_n$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{n} a_n}_{S_n} = \lim_{n\to+\infty} S_n$

Esempio $a_n = n \qquad (a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3, \dots)$

$S_n = a_1 + \dots + a_n$

$S_1 = a_1 = 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (per chi lo ha visto)

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\lim_{n\to+\infty} S_n} = +\infty$

CRITERIO Se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE, allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

1) **SERIE GEOMETRICA** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q \in \mathbb{R}$

Es. $q = \frac{1}{2}$, $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots}_{=1} = 2$

Perché?

Se $q \neq 1$, allora $\underbrace{\displaystyle\sum_{n=0}^{n} q^n}$ $= 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ ← è S_n

[infatti $(q-1)(q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1) = q^{n+1} - \cancel{q^n} + \cancel{q^n} - \cancel{q^{n-1}} + \dots + \cancel{q} - \cancel{q} - 1$]

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n \underset{q\neq 1}{=} \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}_{S_n} = \frac{1}{q-1}\left(\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} - 1\right)$

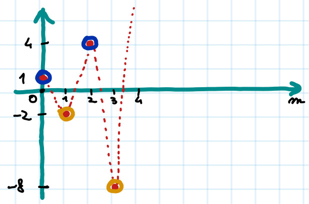
Quindi dobbiamo calcolare questo limite...

$q > 1 \implies \lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$ La serie DIVERGE

$q < -1 \implies \lim_{n\to+\infty} q^{n+1}$ NON ESISTE La serie è INDETERMINATA

$q^{2n} \to +\infty$

$q^{2n+1} \to -\infty$



Ad esempio $q = -2$

$1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots$

$q = -1 \implies \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}$ NON ESISTE La serie è INDETERMINATA

oscilla infinite volte tra -1 e 1.

$$S_n = \underset{0}{1} - \underset{1}{1} + \underset{2}{1} - \underset{3}{1} + \dots + \underset{n-1}{1} - \underset{n}{1} = \begin{cases} 0, & n \text{ DISPARI} \\ 1, & n \text{ PARI} \end{cases}$$

Quindi per $q = -1$ $\lim_{n\to+\infty} S_n$ NON ESISTE

$-1 < q < 1 \implies \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$, e quindi La serie CONVERGE

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{q-1} \lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{q^{n+1}}_{\to 0} - 1 \right) = -\frac{1}{q-1} = \boxed{\frac{1}{1-q}}$$

$q = 1 \implies S_n = \underset{0}{1} + \underset{1}{1} + \dots + \underset{n}{1} = n+1$ e $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ La serie DIVERGE

$\left(\text{cioè } \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1+1+1+\dots = +\infty \right)$

In conclusione:

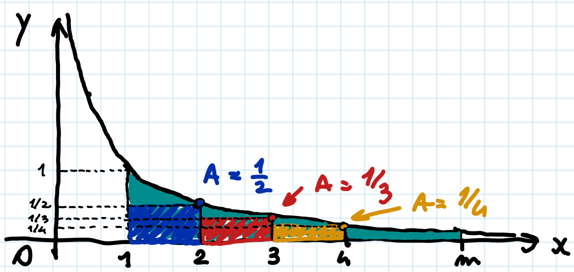
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{CONVERGE } \left(a \ \frac{1}{1-q}\right) & \text{se } -1 < q < 1 \\ \text{DIVERGE } (a +\infty) & \text{se } q \geq 1 \\ \text{è INDETERMINATA} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

2) SERIE ARMONICA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

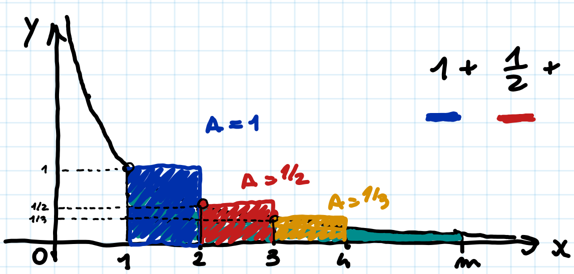
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$, cioè la SERIE ARMONICA DIVERGE. caso "discreto"

- Confronto con l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_1^{+\infty} = +\infty$ caso "continuo"

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$$, mentre $\int_1^{m} \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_1^{m} = \log(m)$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} < \int_1^{m} \frac{1}{x}\,dx = \log(m)$$



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m-1} > \int_1^{m} \frac{1}{x}\,dx = \log m \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$$

3) SERIE ARMONICA GENERALIZZATA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$ CONVERGE $\iff \alpha > 1$ $\left[\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ converge} \iff \alpha > 1 \right]$

Come con gli integrali generalizzati, molto spesso è conveniente usare il confronto asintotico, riconducendosi alla serie armonica generalizzata.

Esercizio 1 Per quali valori del parametro reale α la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^{3\alpha+2}+1}$ converge?

Soluzione

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad , \quad \log(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \left[\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \log(1+x) = x + o(x) \end{aligned} \right]$$

Quindi, per $n \to +\infty$, $\log\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{x}\Big) \sim \frac{1}{n}$

Studiamo il comportamento per $n \to +\infty$ di $n^{3\alpha+2}+1$:

1) $3\alpha+2 > 0 \Rightarrow n^{3\alpha+2}+1 \longrightarrow +\infty$, $n^{3\alpha+2}+1 \sim n^{3\alpha+2}$

2) $3\alpha+2 < 0 \Rightarrow n^{3\alpha+2}+1 \longrightarrow 1$, $n^{3\alpha+2}+1 \sim 1$

3) $3\alpha+2 = 0 \Rightarrow n^{3\alpha+2}+1 = 1+1 = 2$.

1) $3\alpha+2>0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^{3\alpha+2}+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n^{3\alpha+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3\alpha+3}}$, che

CONVERGE perché

$$3\alpha+3 = \underbrace{3\alpha+2}_{>0} + 1 > 1$$

uso questa notazione per dire "ha lo stesso carattere di"

2) $3\alpha+2<0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^{3\alpha+2}+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/n}{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

DIVERGE

3) $3\alpha+2=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\underbrace{n^{3\alpha+2}+1}_{=2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

DIVERGE

In conclusione, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+1/n)}{n^{3\alpha+2}+1}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > -\frac{2}{3}$.

Esercizio 2 Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite della successione

$$a_n = \frac{1}{n^{1-\alpha^2}}.$$

Si determini inoltre, sempre al variare di α, la convergenza della serie

$$\sum_n \frac{1}{n^{1-\alpha^2}}.$$

Soluzione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\underbrace{1-\alpha^2}_{\beta}}} = \begin{cases} 0 & , \text{se } \underbrace{1-\alpha^2}_{\beta} > 0 \iff \alpha \in (-1,1) \\ +\infty & , \text{se } 1-\alpha^2 < 0 \iff \alpha \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ 1 & , \text{se } 1-\alpha^2 = 0 \iff \alpha = \pm 1 \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha^2}}$. Per il criterio iniziale, se la serie converge allora $\lim_n \frac{1}{n^{1-\alpha^2}} = 0$, cioè $\alpha \in (-1,1)$.

Abbiamo una prima condizione su α.

Dal confronto con l'armonica generalizzata, sappiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha^2}} \text{ converge} \iff 1-\alpha^2 > 1 \iff \alpha^2 < 0$$

Cioè, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie NON CONVERGE.

[Più precisamente, poiché la serie è a termini positivi, possiamo dire che DIVERGE (a $+\infty$) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.]

Esercizio 3 (Solo per gli studenti del I anno) Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n\geq 2} \frac{5^n\, n^5}{((\log n)^{\alpha-5})^n}$$

Nell'espressione troviamo 5^n, $((\log n)^{\alpha-5})^n$

$\rightsquigarrow$ è conveniente ricorrere al CRITERIO DELLA RADICE.

- Recap. (CRITERIO DELLA RADICE)

  $a_n \geq 0$. Consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Supponiamo che esista

  $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Allora:

  $L > 1 \Rightarrow$ la serie diverge (a $+\infty$)

  $L < 1 \Rightarrow$ la serie converge

  ($L = 1$ non possiamo dire nulla.) il caso $L=1$ va trattato separatamente, come vedremo nell'Ex. 4.

- Un limite "notevole" ricorrente: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n})^\alpha = 1$. per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left[\lim_n \sqrt[n]{n} = \lim_n n^{\frac{1}{n}} = \lim_n e^{\underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\to 0}} = e^0 = 1.\right]$$

<u>Soluzione</u>

Applichiamo il criterio della radice: $a_n = \dfrac{5^n \cdot n^5}{((\log n)^{\alpha-5})^n} > 0$ per ogni $n \geq 2$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{(\log n)^{\alpha-5}} \sqrt[n]{n^5}$$

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 5 \lim_n \frac{\overbrace{\sqrt[n]{n^5}}^{\to 1 \text{ (visto prima)}}}{(\log n)^{\alpha-5}} = 5 \lim_n \frac{1}{(\log n)^{\alpha-5}} = \begin{cases} 0, & \alpha > 5 \;\} \; L=0<1 \\ +\infty, & \alpha < 5 \\ 5, & \alpha = 5 \end{cases} \Bigg\} L>1$$

Per il Criterio della Radice, si ha che la serie

CONVERGE per $\alpha > 5$, DIVERGE $(a +\infty)$ per $\alpha \leq 5$.

Esercizio 4 Studiare la convergenza della serie $\sum_{n\geq 1} \frac{|2-\alpha|^{n+2}}{n^3 e^n}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

$$a_n = \frac{|2-\alpha|^{n+2}}{n^3 e^n} \geq 0$$

Criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{|2-\alpha|^n \cdot |2-\alpha|^2}{n^3 e^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|2-\alpha|}{e} \frac{\sqrt[n]{|2-\alpha|^2}}{\underbrace{\sqrt[n]{n^3}}_{\to 1}}$$

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{|2-\alpha|}{e} \lim_n \sqrt[n]{|2-\alpha|^2} =$$

$$= \frac{|2-\alpha|}{e} \underbrace{\lim_n |2-\alpha|^{\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0}}}_{= \begin{cases} 1, & 2-\alpha \neq 0 \\ 0, & 2-\alpha = 0 \end{cases}}$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow a_n = \frac{|2-\alpha|^{n+2}}{n^3 e^n} = 0 \Rightarrow \sum_n a_n = 0 \quad \text{converge}$$

$$\alpha \neq 2 \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{|2-\alpha|}{e} = L$$

$$L > 1 \iff |2-\alpha| > e \iff 2-\alpha < -e \ \vee \ 2-\alpha > e$$

$$\iff \alpha > 2+e \ \vee \ \alpha < 2-e$$

Per questi valori di α, la serie DIVERGE $(a +\infty)$.

$L < 1 \iff |2-\alpha| < e \iff -e < \alpha - 2 < e$
$\iff 2-e < \alpha < 2+e$

Per questi valori di α, la serie CONVERGE

$L = 1 \iff \alpha = 2-e \ \vee \ \alpha = 2+e$

Il Criterio della Radice non ci dà informazioni sul carattere della serie.

Quindi ? Analizziamo questi casi specifici a parte:

$L = 1 \iff |2-\alpha| = e$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|2-\alpha|^{n+2}}{n^3 e^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{n+2}}{n^3 e^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{e^2}{n^3} = e^2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} < +\infty$$

converge perché $3 > 1$

In conclusione, la serie CONVERGE per $2-e \leq \alpha \leq 2+e$; DIVERGE ($a +\infty$) per $\alpha < 2-e \ \vee \ \alpha > 2+e$

Osservazione Notare che applicando il criterio della radice, il fattore $\sqrt[n]{n^3}$ "conta come 1" indipendentemente dall'esponente 3.
Avremmo ottenuto gli stessi valori di L nel caso

$$a_n = \frac{|2-\alpha|^{n+2}}{n^{1/2} e^n},$$

ma, andando ad analizzare il caso specifico $L = 1$ ($|\alpha-2| = e$), avremmo trovato

$$\sum_{n\geq 1} a_n = e^2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty .$$